

**LIBRIS**

We know  
books

**GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER**

**MEMORATOR ȘI ÎNDRUMAR  
DE MATEMATICĂ  
G E O M E T R I E  
PENTRU GIMNAZIU  
Ediție nouă revizuită și adăugită**

**EDITURA HYPERION  
CRAIOVA 2022**

## BIBLIOGRAFIE

1. Manuale de matematică pentru clasa a V-a.
2. Manuale de matematică pentru clasa a VI-a.
3. Manuale de matematică pentru clasa a VII-a.
4. Manuale de matematică pentru clasa a VIII-a.
5. Gheorghe Adalbert Schneider, *Culegere de probleme de geometrie pentru clasele 5 - 8*, Editura Hyperion, Craiova 2021.
6. Gheorghe Adalbert Schneider, *Matematică – exerciții și probleme pentru clasa a-VI-a*, Editura Hyperion, Craiova 2021.
7. Gheorghe Adalbert Schneider, *Matematică – exerciții și probleme pentru clasa a-VII-a*, Editura Hyperion, Craiova 2021.
8. Gheorghe Adalbert Schneider, *Matematică – exerciții și probleme pentru clasa a-VIII-a*, Editura Hyperion, Craiova 2021.

## CUPRINS

<b>Geometrie plană</b>	3
1. Punctul, dreapta, segmentul de dreaptă, semidreapta	3
1.1 Punctul	3
1.2 Dreapta	3
1.3 Segmentul de dreaptă	5
1.4 Semidreapta	8
2. Unghiul	9
2.1 Elementele și măsura unui unghi	9
2.2 Clasificarea unghiurilor	10
2.3 Congruența unghiurilor	10
2.4 Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi...	10
2.5 Unghiuri opuse la vârf; congruența lor; unghiuri formate în jurul unui punct; suma măsurilor lor	12
3. Congruența triunghiurilor	14
3.1 Triunghi: definiție, elemente; clasificarea triunghiurilor; perimetrul triunghiului	14
3.2 Construcția triunghiurilor	16
3.3 Congruența triunghiului oarecare	17
4. Perpendicularitate	19
4.1 Drepte perpendiculare; oblice; distanța de la un punct la o dreaptă	19
4.2 Înălțimea în triunghi; concurența înălțimilor	19
4.3 Criterii de congruență ale triunghiurilor dreptunghice: IC, IU, CC, CU	21
4.4 Mediatoarea unui segment; construcția mediatoarei unui segment; concurența mediatoarelor laturilor unui triunghi; simetria față de o dreaptă	22
5. Paralelism	23
5.1 Drepte paralele; construirea dreptelor paralele; axioma paralelelor	23

	5.2 Criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă) . . . . .	24
6.	Proprietăți ale triunghiurilor . . . . .	27
	6.1 Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi; teorema unghiului exterior . . . . .	27
	6.2 Mediana în triunghi; concurența medianelor unui triunghi . . . . .	28
	6.3 Proprietăți ale triunghiului isoscel . . . . .	29
	6.4 Proprietăți ale triunghiului echilateral . . . . .	31
	6.5 Proprietăți ale triunghiului dreptunghic . . . . .	32
7	Patrulater . . . . .	33
	7.1 Patrulaterul convex, suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex . . . . .	33
	7.2 Paralelogram; proprietăți . . . . .	34
	7.3 Paralelograme particulare; dreptunghi, romb și pătrat; proprietăți . . . . .	36
	7.4 Trapez, clasificare; trapez isoscel, proprietăți . . . . .	40
	7.5 Arii; calculul ariilor unor suprafețe . . . . .	42
	7.6 Aplicații . . . . .	45
8	Asemănarea triunghiurilor . . . . .	46
	8.1 Raportul a două segmente, segmente proporționale . . . . .	46
	8.2 Teorema paralelelor echidistante. Teorema lui Thales . . . . .	46
	8.3 Linia mijlocie în triunghi. Proprietăți. Centrul de greutate al unui triunghi . . . . .	47
	8.4 Linia mijlocie în trapez; proprietăți . . . . .	48
	8.5 Triunghiuri asemenea; teorema fundamentală a asemănării . . . . .	48
	8.6 Aplicații . . . . .	49
9	Relații metrice în triunghiul dreptunghic . . . . .	51
	9.1 Proiecții ortogonale pe o dreaptă . . . . .	51

	9.2 Teoreme importante, teorema înălțimii, teorema catetei, teorema lui Pitagora . . . . .	51
	9.3 Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic; sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi . . . . .	52
	9.4 Rezolvarea triunghiului dreptunghic . . . . .	53
	9.5 Aplicații . . . . .	54
10	Cercul . . . . .	55
	10.1 Cercul; definiție, elemente . . . . .	55
	10.2 Unghi la centru; măsura arcelor; arce congruente . . . . .	56
	10.3 Coarde și arce în cerc . . . . .	56
	10.4 Unghi înscris în cerc; triunghi înscris în cerc . . . . .	57
	10.5 Patrulater înscris în cerc; patrulater inscriptibil . . . . .	57
	10.6 Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc; tangenta dintr-un punct exterior la un cerc; triunghi circumscris unui cerc; patrulater circumscris unui cerc . . . . .	58
	10.7 Poligoane regulate; calculul elementelor în triunghiul echilateral, pătrat, hexagon regulat . . . . .	59
	10.8 Aplicații . . . . .	60
	<b>Geometrie în spațiu</b>	
1.	Relații între puncte, drepte și plane . . . . .	61
	1.1 Puncte, drepte, plane; determinarea dreptei, determinarea planului . . . . .	61
	1.2 Unghiul a două drepte în spațiu, drepte perpendiculare . . . . .	61
	1.3 Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan; dreaptă perpendiculară pe un plan; distanța de la un punct la un plan . . . . .	62
	1.4 Pozițiile relative a două plane; plane paralele; distanța dintre două plane paralele . . . . .	63
	1.5 Aplicații . . . . .	63

2.	Proiecții ortogonale pe un plan	66
2.1	Proiecții de puncte, segmente și de drepte pe un plan; unghiul unei drepte cu un plan; lungimea proiecției unui segment pe un plan	66
2.2	Teorema celor trei perpendiculare	68
2.3	Unghi diedru; unghiul dintre două plane; plane perpendiculare	69
3.	Corpuri geometrice	70
3.1	Prisma regulată.	70
3.2	Piramida regulată	73
3.3	Trunchiul de piramidă regulată	76
3.4	Corpuri rotunde	78
3.4.1	Cilindrul circular drept	78
3.4.2	Conul circular drept	80
3.4.3	Trunchiul de con circular drept	81
3.4.4	Sfera	82
4.	Probleme alese de geometrie	84

Tiparul executat la  
**EDITURA HYPERION**  
**CRAIOVA**  
 Str. Împăratul Traian Nr. 30

## GEOMETRIE PLANĂ

### 1. Punctul, dreapta, segmentul de dreaptă, semidreapta

#### 1.1 Punctul

1. **Punctul** reprezintă o noțiune fundamentală a geometriei, se notează cu litere mari de tipar:  $A, B, C, \dots$  și se reprezintă:  $\bullet A$  sau  $\bullet B$  sau  $\bullet C, \dots$ .

Fiind date punctele  $A$  și  $B$ , avem una din situațiile:

- $A = B$  - punctele sunt identice;
- $A \neq B$  - punctele sunt diferite (distincte);

O mulțime de puncte determină o **figură geometrică**.

#### 1.2 Dreapta

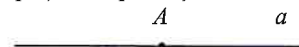
1. O **dreaptă** se poate desena cu ajutorul unei rigle și este nemărginită. Ea se poate nota cu litere mici  $a, b, c, \dots$  sau prin citirea a două puncte de pe ea  $AB, BC, \dots$ .

**Exemple:**

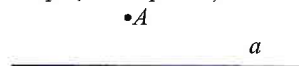


- Fiind dată dreapta  $a$  și punctul  $A$ , atunci avem una din situațiile:

- punctul  $A$  aparține dreptei  $a$  și scriem  $a \in A$ ;



- punctul  $A$  nu aparține dreptei  $a$  și scriem  $a \notin A$ .



Trei puncte care se găsesc pe aceeași dreaptă se numesc

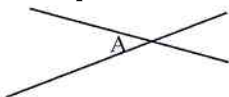
puncte coliniare.



– Fiind date două drepte  $a$  și  $b$ , notăm  $a \cap b$  mulțimea punctelor comune dreptelor  $a$  și  $b$ .

– Dacă  $a \cap b = \emptyset$ , atunci dreptele  $a$  și  $b$  nu au nici un punct comun și se numesc **drepte paralele** și se notează  $a \parallel b$ .

– Dacă  $a \cap b = \{A\}$ , atunci dreptele  $a$  și  $b$  au un punct comun și se numesc **drepte concurente**.



– Dacă  $a \cap b$  are cel puțin două puncte, atunci dreptele  $a$  și  $b$  **coincid** și scriem  $a = b$ .



## 2. Aplicații

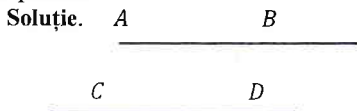
a) Desenați trei puncte coliniare  $A, B, C$  și un alt punct  $M \notin \{A, B, C\}$ . Stabili ce drepte distincte trec prin aceste puncte.

**Soluție.**  $A \bullet \quad B \bullet \quad C \bullet$

$M \bullet$

Prin aceste puncte trec dreptele distincte:  $AB, AM, BM, CM$ .

b) Se consideră punctele  $A, B, C, D$  astfel încât dreptele  $AB$  și  $CD$  să fie paralele. Să se determine dreptele determinate de aceste puncte.



Dreptele sunt:  $AB, CD, AC, BD, AD$  și  $BC$ .

## 1.3 Segmentul de dreaptă

1. **Segmentul de dreaptă** reprezintă porțiunea dintr-o dreaptă cuprinsă între două puncte  $A$  și  $B$  ale dreptei, numite extremitățile segmentului.

Segmentul se notează:

$[AB]$  - caz în care conține toate punctele de pe dreaptă cuprinse între  $A$  și  $B$ , inclusiv  $A$  și  $B$ ;

$(AB)$  - caz în care conține toate punctele de pe dreaptă cuprinse între  $A$  și  $B$ , fără să conțină punctele  $A$  și  $B$ ;

$\overline{AB}$  - caz în care conține toate punctele de pe dreaptă cuprinse între  $A$  și  $B$ , inclusiv punctul  $A$ , și nu conține punctul  $B$ ;

$\overline{AB}$  - caz în care conține toate punctele de pe dreaptă cuprinse între  $A$  și  $B$ , inclusiv punctul  $B$  și nu conține punctul  $A$ .

**Exemple.**



Segmentul  $[AA]$  se numește segmentul **nul**.

2. **Lungimea** unui segment de dreaptă  $[AB]$  reprezintă distanța dintre punctele  $A$  și  $B$ , exprimată într-o unitate de măsură, se notează  $AB$  și se măsoară cu rigla.

3. **Unitatea principală** pentru măsurarea **lungimii** este metrul, care se va nota m.

**Multiplii** metrului sunt: dam = 10m, hm=100m, km=1000m.

**Submultiplii** metrului sunt: dm, cm, mm și avem :

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}.$$

Segmentul de dreaptă se poate construi cu ajutorul riglei.

4. Două segmente  $[AB]$  și  $[CD]$  sunt **congruente**, dacă au lungimi egale și notăm  $[AB] \equiv [CD]$ .

Relația de congruență a segmentelor are următoarele proprietăți și este atunci **relație de echivalență**:

**DEFINIȚIE.** We know

- a) este reflexivă:  $[AB] \equiv [AB]$ ;  
 b) este simetrică: dacă  $[AB] \equiv [CD]$ , atunci  $[CD] \equiv [AB]$ ;  
 c) este tranzitivă: dacă  $[AB] \equiv [CD]$  și  $[CD] \equiv [EF]$ ,  
 atunci  $[AB] \equiv [EF]$ .

**Mijlocul unui segment**  $[AB]$  este punctul  $M$ , care împarte segmentul  $[AB]$  în două segmente congruente ( $[AM] \equiv [MB]$ ).

5. Fiind date segmentele  $[AB]$  și  $[CD]$ , numim **segmentul sumă** al celor două segmente, segmentul  $[MN]$ , care are lungimea egală cu suma lungimilor celor două segmente.

**Exemplu.** Fiind date segmentele  $[AB]$  și  $[CD]$ ,  $AB = a$  și  $CD = b$ , atunci  $[AB] + [CD] = [MN]$ , unde  $MN = a + b$ .

6. Fiind date segmentele  $[AB]$  și  $[CD]$ ,  $AB > CD$ , numim **segmentul diferență** al celor două segmente, segmentul  $[MN]$ , care are lungimea egală cu diferența lungimilor celor două segmente.

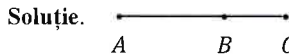
**Exemplu.** Fiind date segmentele  $[AB]$  și  $[CD]$ ,  $AB = a$  și  $CD = b$ ,  $a > b$ , atunci  $[AB] - [CD] = [MN]$ , unde  $MN = a - b$ .

7. Fiind date segmentele  $[AB]$  și  $[CD]$ , vom construi **segmentul sumă** al celor două segmente astfel: pe dreapta suport a segmentului  $[AB]$  (de exemplu), în prelungirea lui  $[AB]$  construim un segment  $[BE]$ , astfel încât  $BE = CD$ . Atunci segmentul sumă este segmentul  $[AE]$ , deoarece  $AE = AB + BE = AB + CD$ .

8. Fiind date segmentele  $[AB]$  și  $[CD]$ ,  $AB > CD$ , vom construi **segmentul diferență** al celor două segmente  $[AB] - [CD]$  astfel: pe dreapta suport a segmentului  $[AB]$  se ia segmentul  $[AE]$ , astfel încât  $AE = CD$ . Atunci segmentul diferență este segmentul  $[EB]$ , deoarece  $EB = AB - CD$ .

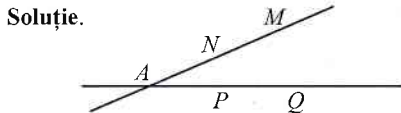
### 9. Aplicații

a) Desenați două segmente de dreaptă distincte și care să aibă cel puțin două puncte comune.



Segmentele  $[AB]$  și  $[AC]$  au ca puncte comune toate punctele segmentului  $[AB]$ , deci cel puțin două.

b) Desenați două drepte  $a$  și  $b$ , care se intersectează în punctul  $A$ . Luați punctele distincte  $M, N \in a$  și  $P, Q \in b$ , astfel încât  $A \notin [M, N]$  și  $A \notin [P, Q]$ . Stabiliți toate segmentele de dreaptă determinate de punctele  $M, N, P, Q$ .



Segmentele de dreaptă determinate de punctele  $M, N, P, Q$  sunt:  $[MN]$ ,  $[MP]$ ,  $[MQ]$ ,  $[NP]$ ,  $[NQ]$ ,  $[PQ]$ .

c) Fie  $A, B, C$  trei puncte coliniare. Știind că  $AB = a$  și  $BC = b$ , să se calculeze  $AC$ . Discuție.

**Soluție.** Dacă  $B \in [AC]$ , atunci  $AC = AB + BC = a + b$ .  
 Dacă  $A \in [BC]$ , atunci  $AC = BC - BA = b - a$ .  
 Dacă  $C \in [AB]$ , atunci  $AC = AB - CB = a - b$ .

d) Fie  $A, B, C$  trei puncte coliniare în această ordine. Fie  $M$  mijlocul lui  $[AB]$ ,  $N$  mijlocul lui  $[BC]$  și  $P$  mijlocul lui  $[AC]$ . Să se demonstreze relațiile:

$$1) MN = \frac{AC}{2}; \quad 2) MP = \frac{BC}{2}; \quad 3) NP = \frac{AB}{2}.$$

**Soluție.**

$$MN = BM + BN = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AB + BC}{2} = \frac{AC}{2}.$$

$$MP = AP - AM = \frac{AC}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{AC - AB}{2} = \frac{BC}{2}.$$

$$NP = PC - NC = \frac{AC}{2} - \frac{BC}{2} = \frac{AC - BC}{2} = \frac{AB}{2}.$$

# LRDIS We know

## 1.4 Semidreapta

1. Semidreapta reprezintă o parte dintr-o dreaptă, limitată la un capăt, numit originea semidreptei și nemărginită la celălalt capăt.

### Exemple.



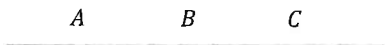
Semidreptele se notează  $[AB$ , dacă sunt închise și  $(AB$  dacă sunt deschise. Avem:  $[AB = (AB \cup \{O\}$ .

Dreapta pe care se găsește o semidreaptă se numește **dreapta suport a semidreptei**.

2. Dacă  $A, B, C$  sunt trei puncte coliniare, situate în această ordine pe dreapta suport, atunci semidreptele  $[BA$  și  $[BC$  au aceeași origine  $B$ , dar sensuri opuse și se numesc **semidrepte opuse**.



3. Dacă  $A, B, C$  sunt trei puncte coliniare, situate în această ordine pe dreapta suport, atunci semidreptele  $[AB$  și  $[AC$  au aceeași origine  $A$ , și același sens și se numesc **semidrepte identice**.



### 4. Aplicații.

a) Se consideră o dreaptă  $a$  și trei puncte distincte  $A, B, C \in a$ . Scrieți toate segmentele și semidreptele determinate de aceste puncte pe dreaptă.

#### Soluție.



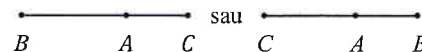
Segmentele de dreaptă determinate de cele trei puncte sunt:  $[AB], [BC], [AC]$ .

Semidreptele închise determinate sunt:  $[AB], [AC], [BA], [BC]$ ,

$[CA], [CB$ , iar semidreptele deschise determinate sunt:  $(AB), (AC), (BA), (BC), (CA), (CB)$ .

b) Se consideră punctele coliniare  $A, B, C$ . Stabiliți poziția acestor puncte, astfel încât semidreptele  $(AB$  și  $(AC$  să nu coincidă.

#### Soluție.



## 2. Unghiul

### 2.1 Elementele și măsura unui unghi

1. **Unghiul** reprezintă figura geometrică formată din două semidrepte închise care au aceeași origine.

Unghiul se notează  $\angle AOB$  sau  $\widehat{AOB}$  unde semidreptele  $[OA$  și  $[OB$  se numesc laturile unghiului, iar  $O$  se numește vârful unghiului.

#### Exemple.



2. Unitatea de măsură a unui unghi se numește grad.

Subunități ale gradului sunt minutul și secunda.

Avem relațiile:

$$1^\circ = 60' \text{ (un grad egal 60 minute) și}$$

$$1' = 60'' \text{ (un minut egal 60 secunde).}$$

Măsurarea unui unghi se face cu raportorul și ea este o măsurare aproximativă.

Măsura unghiului  $\widehat{AOB}$  o notăm  $m(\widehat{AOB})$ .

Un unghi ale cărui laturi coincid se numește **unghi nul** ( $0^\circ$ ).

Un unghi ale cărui laturi sunt semidrepte opuse se numește **unghi alungit sau unghi cu laturile în prelungire** ( $180^\circ$ ).

**Unghiul propriu** nu este nici nul nici alungit.