GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

MEMORATOR ȘI ÎNDRUMAR DE MATEMATICĂ G E O M E T R I E PENTRU GIMNAZIU

Ediție nouă revizuită și adăugită

EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2022

BIBLIOGRAFIE

1. **Manuale de matematică pentru clasa a V-a.**
2. **Manuale de matematică pentru clasa a VI-a.**
3. **Manuale de matematică pentru clasa a VII-a.**
4. **Manuale de matematică pentru clasa a VIII-a.**
5. **Gheorghe Adalbert Schneider,** ***Culegere de probleme de geometrie pentru clasele 5 - 8***, Editura **Hyperion**, Craiova 2021.
6. **Gheorghe Adalbert Schneider,** ***Matematică – exerciții și probleme pentru clasa a-VI-a,*** Editura **Hyperion**, Craiova 2021.
7. **Gheorghe Adalbert Schneider,** ***Matematică – exerciții și probleme pentru clasa a-VII-a,*** Editura **Hyperion**, Craiova 2021.
8. **Gheorghe Adalbert Schneider,** ***Matematică – exerciții și probleme pentru clasa a-VIII-a,*** Editura **Hyperion**, Craiova 2021.

CUPRINS

Tiparul executat la
EDITURA HYPERION
CRAIOVA
Str. Împăratul Traian Nr. 30

GEOMETRIE PLANĂ

1. Punctul, dreapta, segmentul de dreaptă, semidreapta

1.1 Punctul

1. **Punctul** reprezintă o noțiune fundamentală a geometriei, se notează cu litere mari de tipar: $A, B, C, \cdots$ și se reprezintă: $\bullet\, A$ sau $\bullet\, B$ sau $\bullet\, C$, $\cdots$.

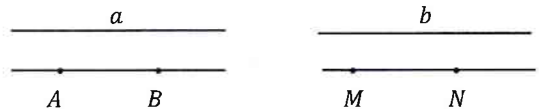
Fiind date punctele A și B, avem una din situațiile:
– $A = B$ - punctele sunt identice;
– $A \neq B$ - punctele sunt diferite (distincte);

O mulțime de puncte determină o **figură geometrică**.

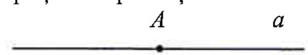
1.2 Dreapta

1. O **dreaptă** se poate desena cu ajutorul unei rigle și este nemărginită. Ea se poate nota cu litere mici $a, b, c, \cdots$ sau prin citirea a două puncte de pe ea $AB, BC, \cdots$.

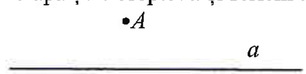
Exemple:



– Fiind dată dreapta a și punctul A, atunci avem una din situațiile:
– punctul A aparține dreptei a și scriem $a \in A$;



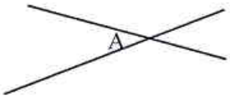
– punctul A nu aparține dreptei a și scriem $a \notin A$.



Trei puncte care se găsesc pe aceeași dreaptă se numesc puncte coliniare.

A B C

– Fiind date două drepte a și b, notăm $a \cap b$ mulțimea punctelor comune dreptelor a și b.
– Dacă $a \cap b = \emptyset$, atunci dreptele a și b nu au nici un punct comun și se numesc **drepte paralele** și se notează $a||b$.
– Dacă $a \cap b = \{A\}$, atunci dreptele a și b au un punct comun și se numesc **drepte concurente**.



– Dacă $a \cap b$ are cel puțin două puncte, atunci dreptele a și b **coincid** și scriem $a = b$.

a A B b

2. Aplicații

a) Desenați trei puncte coliniare A, B, C și un alt punct $M \notin \{A, B, C\}$. Stabili ce drepte distincte trec prin aceste puncte.

Soluție. $A \bullet$ $B \bullet$ $C \bullet$

$M \bullet$

Prin aceste puncte trec dreptele distincte: AB, AM, BM, CM.

b) Se consideră punctele A, B, C, D astfel încât dreptele AB și CD să fie paralele. Să se determine dreptele determinate de aceste puncte.

Soluție. A B

C D

Dreptele sunt: AB, CD, AC, BD, AD și BC.

1.3 Segmentul de dreaptă

1. Segmentul de dreaptă reprezintă porțiunea dintr-o dreaptă cuprinsă între două puncte A și B ale dreptei, numite extremitățile segmentului.

Segmentul se notează:
$[AB]$ - caz în care conține toate punctele de pe dreaptă cuprinse între A și B, inclusiv A și B;
(AB) - caz în care conține toate punctele de pe dreaptă cuprinse între A și B, fără să conțină punctele A și B;
$[AB)$ - caz în care conține toate punctele de pe dreaptă cuprinse între A și B, inclusiv punctul A , și nu conține punctul B;
$(AB]$ - caz în care conține toate punctele de pe dreaptă cuprinse între A și B, inclusiv punctul B și nu conține punctul A.

Exemple.

A B A B

A B A B

Segmentul $[AA]$ se numește segmentul **nul**.

2. Lungimea unui segment de dreaptă $[AB]$ reprezintă distanța dintre punctele A și B, exprimată într-o unitate de măsură, se notează AB și se măsoară cu rigla.

3. Unitatea principală pentru măsurarea **lungimii** este metrul, care se va nota m.

Multiplii metrului sunt: dam = 10m, hm=100m, km=1000m.

Submultiplii metrului sunt: dm, cm, mm și avem :
1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm.

Segmentul de dreaptă se poate construi cu ajutorul riglei.

4. Două segmente $[AB]$ și $[CD]$ sunt **congruente**, dacă au lungimi egale și notăm $[AB] \equiv [CD]$.

Relația de congruență a segmentelor are următoarele proprietăți și este atunci **relație de echivalență**:

a) este reflexivă: $[AB] \equiv [AB]$;
b) este simetrică: dacă $[AB] \equiv [CD]$, atunci $[CD] \equiv [AB]$;
c) este tranzitivă: dacă $[AB] \equiv [CD]$ și $[CD] \equiv [EF]$, atunci $[AB] \equiv [EF]$.

Mijlocul unui segment $[AB]$ este punctul M, care împarte segmentul $[AB]$ în două segmente congruente ($[AM] \equiv [MB]$).

5. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, numim **segmentul sumă** al celor două segmente, segmentul $[MN]$, care are lungimea egală cu suma lungimilor celor două segmente.

Exemplu. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, $AB = a$ și $CD = b$, atunci $[AB] + [CD] = [MN]$, unde $MN = a + b$.

6. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, $AB > CD$, numim **segmentul diferență** al celor două segmente, segmentul $[MN]$, care are lungimea egală cu diferența lungimilor celor două segmente.

Exemplu. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, $AB = a$ și $CD = b, a > b$, atunci $[AB] - [CD] = [MN]$, unde $MN = a - b$.

7. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, vom construi **segmentul sumă** al celor două segmente astfel: pe dreapta suport a segmentului $[AB]$ (de exemplu), în prelungirea lui $[AB]$ construim un segment $[BE]$, astfel încât $BE = CD$. Atunci segmentul sumă este segmentul $[AE]$, deoarece $AE = AB + BE = AB + CD$.

8. Fiind date segmentele $[AB]$ și $[CD]$, $AB > CD$, vom construi **segmentul diferență** al celor două segmente $[AB] - [CD]$ astfel: pe dreapta suport a segmentului $[AB]$ se ia segmentul $[AE]$, astfel încât $AE = CD$. Atunci segmentul diferență este segmentul $[EB]$, deoarece $EB = AB - CD$.

9. **Aplicații**

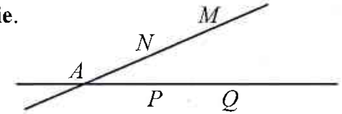
a) Desenați două segmente de dreaptă distincte și care să aibă cel puțin două puncte comune.

Soluție.

Segmentele $[AB]$ și $[AC]$ au ca puncte comune toate punctele segmentului $[AB]$, deci cel puțin două.

b) Desenați două drepte a și b, care se intersectează în punctul A. Luați punctele distincte $M, N \in a$ și $P, Q \in b$, astfel încât $A \notin \{M, N\}$ și $A \notin \{P, Q\}$. Stabiliți toate segmentele de dreaptă determinate de punctele M, N, P, Q.

Soluție.



Segmentele de dreaptă determinate de punctele M, N, P, Q sunt: $[MN], [MP], [MQ], [NP], [NQ], [PQ]$.

c) Fie A, B, C trei puncte coliniare. Știind că $AB = a$ și $BC = b$, să se calculeze AC. Discuție.

Soluție. Dacă $B \in [AC]$, atunci $AC = AB + BC = a + b$.
Dacă $A \in [BC]$, atunci $AC = BC - BA = b - a$.
Dacă C$\in [AB]$, atunci $AC = AB - CB = a - b$.

d) Fie A, B, C trei puncte coliniare în această ordine. Fie M mijlocul lui $[AB], N$ mijlocul lui $[BC]$ și P mijlocul lui $[AC]$. Să se demonstreze relațiile:

1) $MN = \frac{AC}{2}$; 2) $MP = \frac{BC}{2}$; 3) $NP = \frac{AB}{2}$.

Soluție.

$$MN = BM + BN = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AB + BC}{2} = \frac{AC}{2}.$$

$$MP = AP - AM = \frac{AC}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{AC - AB}{2} = \frac{BC}{2}.$$

$$NP = PC - NC = \frac{AC}{2} - \frac{BC}{2} = \frac{AC - BC}{2} = \frac{AB}{2}.$$

1.4 Semidreapta

1. Semidreapta reprezintă o parte dintr-o dreaptă, limitată la un capăt, numit originea semidreptei și nemărginită la celălalt capăt.

Exemple.

A B B A

Semidreptele se notează $[AB$, dacă sunt închise și $(AB$ dacă sunt deschise. Avem: $[AB = (AB \cup \{O\}$.

Dreapta pe care se găsește o semidreaptă se numește **dreapta suport a semidreptei**.

2. Dacă A, B, C sunt trei puncte coliniare, situate în această ordine pe dreapta suport, atunci semidreptele $[BA$ și $[BC$ au aceeași origine B, dar sensuri opuse și se numesc **semidrepte opuse**.

A B C

3. Dacă A, B, C sunt trei puncte coliniare, situate în această ordine pe dreapta suport, atunci semidreptele $[AB$ și $[AC$ au aceeași origine A, și același sens și se numesc **semidrepte identice**.

A B C

4. Aplicații.

a) Se consideră o dreaptă a și trei puncte distincte $A, B, C \in$ $\in a$. Scrieți toate segmentele și semidreptele determinate de aceste puncte pe dreaptă.

Soluție. A B C a

Segmentele de dreaptă determinate de cele trei puncte sunt: $[AB], [BC], [AC]$.

Semidreptele închise determinate sunt: $[AB, [AC, [BA, [BC,$

$[CA, [CB$, iar semidreptele deschise determinate sunt: $(AB, (AC,$ $(BA, (BC, (CA, (CB$.

b) Se consideră punctele coliniare A, B, C. Stabiliți poziția acestor puncte, astfel încât semidreptele $(AB$ și $(AC$ să nu coincidă.

Soluție. B A C sau C A B

2. Unghiul

2.1 Elementele și măsura unui unghi

1. Unghiul reprezintă figura geometrică formată din două semidrepte închise care au aceeași origine.

Unghiul se notează $< AOB$ sau $\widehat{AOB}$ unde semidreptele $[OA$ și $[OB$ se numesc laturile unghiului, iar O se numește vârful unghiului.

Exemple.

2. Unitatea de măsură a unui unghi se numește grad.

Subunități ale gradului sunt minutul și secunda.

Avem relațiile:

$1^\circ = 60'$ (un grad egal 60 minute) și

$1' = 60''$ (un minmut egal 60 secunde).

Măsurarea unui unghi se face cu raportorul și ea este o măsurare aproximativă.

Măsura unghiului $\widehat{AOB}$ o notăm $m(\widehat{AOB})$.

Un unghi ale cărui laturi coincid se numește **unghi nul** (0°).

Un unghi ale cărui laturi sunt semidrepte opuse se numește **unghi alungit sau unghi cu laturile în prelungire** (180°).

Unghiul propriu nu este nici **nul** nici **alungit**.